

令和 8 年度学群編入学試験

理工学群数学類

学 力 検 査

(専門科目)

問 題 冊 子

注意事項

- ① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
- ② 解答用紙は各問題に対して1枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
- ③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
- ④ 下書き用紙は採点しない。
- ⑤ 試験時間は120分です。

問題 I α を実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha & \alpha+1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

とし, $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, 5$) を A の第 i 列のベクトルとする. すなわち, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$ となる. また, $f_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ を $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ が線形従属となる実数 α の値を求めよ. また, このとき, f_A の像 $\text{Im } f_A$ の次元を求めよ.
- (2) A が正則かつ A および A^{-1} の成分がすべて整数となるような正の実数 α を求めよ. また, このとき, A^{-1} を求めよ.
- (3) (2) で求めた α に対して, A のすべての 4×4 小行列の行列式の最大公約数を求めよ.

問題 II $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たす $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ.
- (2) $f(x, y)$ の最大値を求めよ.
- (3) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f(x, y) \geq \alpha$ が成り立つような実数 α の最大値を求めよ.

問題 III X, Y, Z を集合として以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 集合 W と全射 $g: X \rightarrow W$ と単射 $h: W \rightarrow Y$ が存在し, $f = h \circ g$ を満たすことを示せ.
- (2) $f: X \rightarrow Y$ を全射とし, $g_1: Y \rightarrow Z$ と $g_2: Y \rightarrow Z$ を写像とする. $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つことを示せ.
- (3) $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき, 写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$ を満たすことを示せ. ただし, $\text{id}_X: X \rightarrow X$, $\text{id}_Y: Y \rightarrow Y$ は恒等写像であるとする.