

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【理工学群 社会工学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図
問題 1	(1) v_1, v_2, v_3, v_4 について, それぞれ, $Av_1 = -2v_1, Av_2 = -v_2, Av_3 = v_3, Av_4 = 2v_4$ が成り立つ. つまり, 固有値, 固有ベクトルの定義より, v_1, v_2, v_3, v_4 に対応する固有値は, それぞれ $-2, -1, 1, 2$ である. (2) 行列 A は実対称行列であり, 固有値は互いに異なるので, 固有ベクトルは互いに直交する. つまり, 固有ベクトルの長さを 1 に規格化し, 並べた行列 P は直交行列となる: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}v_1 \quad \frac{1}{\sqrt{6}}v_2 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}v_3 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}v_4 \right).$ この直交行列 P を用いると, 行列 A は次のように対角化される. ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【理工学群 社会工学類】

問題 2

(1) ベクトル $a+b$, $a-b$, $a-3b+c$ が 1 次独立であるとは,

$$x(a+b) + y(a-b) + z(a-3b+c) = 0$$

ならば $x=y=z=0$ となることである. この式を整理すると,

$$(x+y+z)a + (x-y-3z)b + zc = 0.$$

ここで, a, b, c は 1 次独立であるため, $x+y+z=x-y-3z=z=0$ が成り立つ. この連立方程式を解くと, $x=y=z=0$. よって, ベクトル $a+b$, $a-b$, $a-3b+c$ は 1 次独立である.

(2) ベクトル a_1 から a_5 を並べた行列:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & -5 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると, 次のような階段行列を得ることができる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

つまり, この行列はランクが 3 であることから, ベクトル a_1 から a_5 から最大 3 つの 1 次独立なベクトルを選ぶことができる. 例えば, そのベクトルの組としては, a_1, a_2, a_3 の組が挙げられる.

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【 理工学群 社会工学類】

問題 3

(1) $(1+x)^a$ のマクローリン展開を 2 次の多項式と剰余項の和の形式で表すと,

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)(1+\theta x)^{a-3}}{6}x^3$$

となる (ただし, $0 < \theta < 1$).

(2) (1) で求めた関係式に $a = -\frac{1}{2}$, $x = -u^2$ を代入すると,

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{8}u^4 + \frac{5(1-\theta u^2)^{-\frac{7}{2}}}{16}u^6.$$

また, 両辺を 0 から定数 b まで積分すると,

$$\arcsin b = b + \frac{1}{6}b^3 + \frac{3}{40}b^5 + E(b).$$

ここで, 題意に従い, 剰余項の積分は $E(b)$ とおいた.

(3) (2) の関係式に $b = \frac{1}{2}$ を代入し $E(1/2)$ を無視すると,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} \right).$$

したがって,

$$\pi \approx 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} \right) = \frac{2009}{640}.$$

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【 理工学群 社会工学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図
問題4	(1) 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0$ ゆえに, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ が成り立ち, 関数 $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続である. (2) 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ によって, 円 D は長方形 $R = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ に対応し, ヤコビ行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$ より, $dx dy = J dr d\theta = r dr d\theta$ となる. したがって, $\begin{aligned} \iint_D (x^2 + 2y^2) dx dy &= \iint_R (\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) \left(\int_0^2 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= 4 \left[\frac{3}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 12\pi \end{aligned}$

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【 理工学群 社会工学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図
問題5	(1) e^λ のマクローリン展開より, $e^\lambda = e^0 + \frac{\lambda}{1!}e^0 + \frac{\lambda^2}{2!}e^0 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ よって, $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$ (2) $\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 \end{aligned}$ (4) $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

令和8年度

試験名:学群編入学試験

【 理工学群 社会学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図
問題6	(1) $m = \frac{11 + 19 + \cdots + 5}{10} = \frac{100}{10} = 10$ $u^2 = \frac{(11 - 10)^2 + (19 - 10)^2 + \cdots + (5 - 10)^2}{9} = \frac{396}{9} = 44$ (2) 標本平均 $m = 10$, 標本サイズ $n = 10$, 母分散 $\sigma^2 = 50$ より, $m \pm z(0.025) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 \pm 1.96 \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = 10 \pm 1.96\sqrt{5} \approx 10 \pm 4.4$ したがって, 信頼区間は $5.6 \leq \mu \leq 14.4$ となる. (3) 標本平均 $m = 10$, 標本サイズ $n = 10$, 不偏分散 $u^2 = 44$ より, $m \pm t_{n-1}(0.025) \frac{u}{\sqrt{n}} = 10 \pm 2.262 \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{10}} = 10 \pm 2.262 \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{\sqrt{5}} \approx 10 \pm 4.7$ したがって, 信頼区間は $5.3 \leq \mu \leq 14.7$ となる.