令和８年度

学群編入学試験　　　　　　　　　　　　　**【 理 工 学 群　　物 理 学 類 】**

区　　分	出 題 意 図 ・ 正 解 例
問題Ⅰ	太陽系外惑星探査法を題材とし、古典力学的に基礎的な問題である二体問題や、円運動、ドップラー効果の基本的な理解度と、その応用能力を問う。
問題Ⅱ	電流回路や変位電流の基本的な理解を問うとともに、回路を流れる電流やコンデンサーの極板に蓄えられる電荷の時間変化を定量的に評価する能力を問う。
問題Ⅲ	理想気体の Carnot サイクルを通して、準静的過程における熱量学的諸量の変化やそれらの間に成り立つ関係を考察させることで、熱量学の基本法則の理解を問う。

問題 I

解答例

参考文献「系外惑星探査 地球外生命体をめざして」河原創著。単なる二体問題であるが三次元極座標の知識も要求している。但し、問題文中に図１として極座標を描いているので対応可能。そして問１～４はそれぞれ前提知識を要求しないので、それぞれ独立に解くことができる。

●問1.

三次元極座標の速度ベクトルを計算する。(r,θ,ϕ)方向の単位ベクトルを、それぞれ$\mathbf{e}_r$、$\mathbf{e}_\theta$、$\mathbf{e}_\phi$のように書く。すると$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$より、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}=\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e_r}+\mathrm{r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e_r}$$ となる。図１から、$\mathbf{e_r}$は

$$\mathbf{e_r}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$ である。これを時間微分すると、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e_r}=\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{bmatrix}+\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}\right)\sin\theta\begin{bmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{bmatrix}=\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}\right)\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$$ となるから、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}=\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e_r}+\mathrm{r}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e}_\theta+\mathrm{r}\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}\right)\mathbf{e}_\phi$$ のように計算できるので、

$$\left|\frac{d}{dt}\mathbf{r}\right|^2=\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)^2+\mathrm{r}^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2+\mathrm{r}^2\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}\right)^2$$ となる。つまり

$$A=r^2$$

別解：図から、

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix}r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{bmatrix}$$

$\frac{dx}{dt}$のうち、$\frac{d\theta}{dt}$に比例する部分の係数は、$r\cos\theta\cos\phi$、$\frac{dy}{dt}$のうち、$\frac{d\theta}{dt}$に比例する部分の係数は、$r\cos\theta\sin\phi$、$\frac{dy}{dt}$のうち、$\frac{d\theta}{dt}$に比例する部分の係数は、$-r\sin\theta$であるから、

$$A=(r\cos\theta\cos\phi)^2+(r\cos\theta\sin\phi)^2+(-r\sin\theta)^2=r^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+r^2\sin^2\theta=r^2$$

●問2.

この系のラグランジアンLは、恒星の位置ベクトルを$\mathbf{r}_1$、惑星の位置ベクトルを$\mathbf{r}_2$とすると、

$$L=\frac{M}{2}\left|\frac{d}{dt}\mathbf{r_1}\right|^2+\frac{m}{2}\left|\frac{d}{dt}\mathbf{r_2}\right|^2+\frac{\mathrm{GMm}}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|}$$

また重心の位置ベクトル$\mathbf{r}_g$と、恒星から見た惑星の相対位置ベクトル$\mathbf{r}_r$は各々以下になる。

$$\mathbf{r_g}=\frac{\mathrm{M}\mathbf{r_1}+\mathrm{m}\mathbf{r_2}}{\mathrm{M+m}}、\mathbf{r_r}=\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}$$

これより、$(\mathbf{r}_1、\mathbf{r}_2)$から$(\mathbf{r}_g、\mathbf{r}_r)$の変換は

$$\mathbf{r_1}=\mathbf{r_g}-\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M+m}}\mathbf{r_r}、\mathbf{r_2}=\mathbf{r_g}+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M+m}}\mathbf{r_r}$$ の関係式を用いればいいので

$$L=\frac{M+m}{2}\left|\frac{d}{dt}\mathbf{r_g}\right|^2+\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}\left|\frac{d}{dt}\mathbf{r_r}\right|^2+\frac{\mathrm{GMm}}{|\mathbf{r_r}|}$$となる。

系の運動は重心の弾道運動と、換算質量Mm/(M+m)を持つ質点の重力ポテンシャル下の運動に分けられる。このことが恒星や惑星の運動方程式を解かずともラグランジアンの形から明確にわかる。なお($\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$)から($\mathbf{r}_g$、$\mathbf{r}_r$)の座標変換は点変換で、オイラー・ラグランジュ方程式は共変。

●問3.

前問のラグランジアンは、$\mathbf{r_g}$をあらわに含まず、「ラグランジアンの形から、重心に力は働かないから、重心は等速直線運動をする」とすぐにわかる。

「質点系の重心運動は、系の全質量を持つ質点の、系に加わる全外力を受けての運動とみなすことができ、この系には外力が働かないのだから、重心は等速直線運動をする」ならOK。

別解としてラグランジアンの知識がなくとも、ニュートンの運動方程式から

$$M\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r_1}=\mathrm{GMm}\frac{\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}}{|\mathbf{r_r}|^3}、\ m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r_2}=\mathrm{GMm}\frac{\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}}{|\mathbf{r_r}|^3}$$

も成り立つので、この２式の和を取ると、

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r_g}=0$$と重心の運動方程式を導ける。

解くと$\mathbf{r}_g$=**A**t+**B**(**A**,**B**は積分定数)。つまり重心は等速直線運動を行う。

２体問題の重心が等速直線運動する理由である。

●問4.

解答例は「重力のような中心力しか働かない古典系は、角運動量ベクトルが保存する。そのため、角運動量ベクトルに垂直な平面内を惑星は常に運動する。」

前問の恒星と惑星のニュートンの運動方程式の差を取り、

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r_r}=-\mathrm{G}\frac{\mathrm{M+m}}{|\mathbf{r_r}|^3}\mathbf{r_r}\qquad (*)$$

軌道角運動量ベクトル$\mathbf{h}\equiv\mathbf{r_r}\times\frac{d}{dt}\mathbf{r_r}$ の時間変化を考えると、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h}=\frac{d}{dt}\mathbf{r_r}\times\frac{d}{dt}\mathbf{r_r}+\mathbf{r_r}\times\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r_r}$$ を得る。

外積の性質から、上式右辺第一項は０であり、（＊）式から上式右辺第二項も０となる。故に

$$\frac{d}{dt}\mathbf{h}=0$$

すなわち軌道角運動量ベクトル**h**は、二体問題上は保存量であり、これは惑星が**h**に直交する平面（軌道面）上の運動に制約されていることを示している。

●問5.

いわゆる「ホット・ジュピター」（恒星の近くを高速で公転する灼熱巨大ガス惑星）は、主星からの潮汐力の影響で、その軌道が真円に近いという。問題文の状況であるが、惑星は重心を中心として等速円運動しているが、恒星から作用する重力は向心力になっているので、この力は重心に向かう。一方、惑星も恒星に重力を及ぼすが、運動量の保存（問２のラグランジアンは$\mathbf{r}_g$をあら

わに含まず、r_gは循環座標で、それに共役な運動量は保存する。）を考えると、恒星は、図２のように重心を挟んで惑星と反対側にあり、等速円運動を惑星とは逆向きに行なっている。そして系の重心は、恒星と惑星を結ぶ線分をm:Mに内分する位置にある。よって恒星と重心の距離をbとすると下式が成り立つ。

$$m\,a = M\,b \rightarrow b = m\,a\,/M$$

そして、惑星の速さをvとして、惑星と恒星の等速円運動の関係式を作る。以下の式が成り立つ。

$$m\frac{v^2}{a} = M\frac{V^2}{b}$$

上2式から、

$$V = \sqrt{\frac{m\,b}{Ma}}v = \frac{m}{M}v$$

さらに、万有引力の式から

$$m\frac{v^2}{a} = G\frac{Mm}{(a+b)^2} = G\frac{Mm}{(a+ma/M)^2}$$

よって、$v^2 = GMa/(a+ma/M)^2$より、

$$V = \frac{m}{M}\frac{\sqrt{GMa}}{a+ma/M} = \frac{m\sqrt{GMa}}{Ma+ma} = \frac{m}{M+m}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

●問6.

光のドップラー効果の問題。特殊相対論では観測波長λと恒星発光波長λ_0は以下の関係がある。

$$\lambda = \frac{1+V_r/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\lambda_0$$

しかし問題文中に示されている条件であるV/c<<1から、上式は

$\lambda \cong (1+V_r/c)\lambda_0$となる。よって、

$$\Delta\lambda \cong (V_r/c)\lambda_0$$

別解として、高校物理で習う音波のドップラー効果の式を、そのまま使うと、恒星が発する光の周波数をf_0とすると、$\lambda_0 = c/f_0$であり、ドップラー効果で波長λは、光速cを用いて

$$\lambda = \frac{c+V_r}{f_0}\text{ となり、}\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{V_r}{f_0} = \frac{V_r}{c}\lambda_0$$

また次元解析という手もある。問題文では「V_r、λ_0、cを使え」とだけ書いてあり、他の問題の「必要なもの」という語句が欠けている。そのため、それらを全て使った次元解析から、解答の$\Delta\lambda = V_r\lambda_0/c$が推定できるかもしれない。

●問7.

問６の結果から、V_rの最大値はVなので、$\Delta\lambda/\lambda_0$の最大値$(\Delta\lambda/\lambda_0)_{max}$について、惑星発見の条件と問５の結果から、以下の不等式が成り立つ。

$$\delta_m < \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\right)_{max} = \frac{V}{c} = \frac{m}{c(M+m)}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

上式をa=の式にすることで、発見可能惑星の条件式がわかる。それは次式の不等式になる。

$$a < \frac{GM}{\delta_m^2 c^2}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2$$

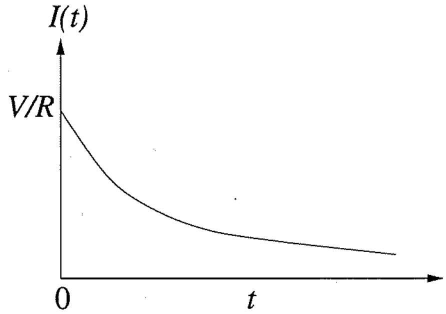
恒星の近くを高速で公転する「ホット・ジュピター」は比較的発見が容易なため、太陽系外惑星の探査の初期から多数が発見されているという。1995年の太陽系外惑星の最初の発見も「ホット・ジュピター」であり、太陽系の水星よりも恒星に近い距離で公転しているという。

問題Ⅱ

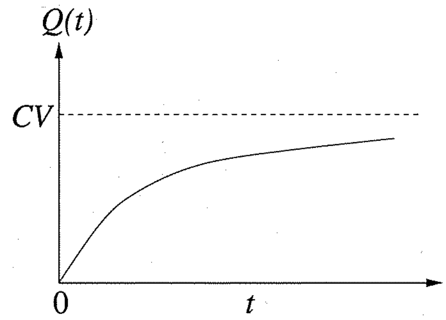
【解答例】

問１　$R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0\ (\because RI+\frac{Q}{C}=V)$

問２　問１の微分方程式の解：$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$



問３　$Q(t)=\int_0^t I(\tau)\,d\tau=VC\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$



問４　電源の仕事率：$VI=\frac{V^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

抵抗のジュール熱：$RI^2=\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$

コンデンサーの静電エネルギーの増加率：$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)=\frac{Q}{C}I=\frac{V^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{RC}}-e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$

問５　$E_c(t)=\frac{Q(t)}{\varepsilon_0\pi a^2}=\frac{VC}{\varepsilon_0\pi a^2}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

問６　$I_c(r,t)=\frac{dQ(t)}{dt}\frac{\pi r^2}{\pi a^2}=I(t)\frac{r^2}{a^2}=\frac{V}{R}\frac{r^2}{a^2}e^{-\frac{t}{RC}}$

問題Ⅲ

解答例

問1.　気体が外界になした仕事を $W_{1\to2}$ とすると、

$$W_{1\to2} = \int_{V_1}^{V_2} p(T_1, V)\, dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\, dV = nRT_1 \log\frac{V_2}{V_1}$$

問2.　理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数なので、等温準静的過程では内部エネルギーは変化しない。よって、気体が熱源から受け取った熱量 Q_H は、気体が外界になした仕事 $W_{1\to2}$ に等しいので、

$$Q_H = W_{1\to2} = nRT_1 \log\frac{V_2}{V_1}$$

問3.　断熱条件より、

$$C_V\, dT + p(T, V)\, dV = C_V\, dT + nRT\frac{dV}{V} = 0$$

$T > 0$ のとき、

$$C_V\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} = C_V\frac{dT}{T} + \left(C_p - C_V\right)\frac{dV}{V} = C_V\left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V}\right] = 0$$

よって、$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0$ より、

$$\log T + (\gamma - 1)\log V = \log(TV^{\gamma-1}):\text{一定}$$
$$\to TV^{\gamma-1} = \frac{1}{nR}pV^{\gamma}:\text{一定}$$
$$\to\ pV^{\gamma}:\text{一定}$$

問4.　気体が外界になした仕事を $W_{2\to3}$ とすると、

$$W_{2\to3}=\int_{V_2}^{V_3}p\,dV=\int_{V_2}^{V_3}pV^{\gamma}\frac{dV}{V^{\gamma}}=\int_{V_2}^{V_3}p_2V_2^{\gamma}\frac{dV}{V_2^{\gamma}}$$

ここで、Mayerの関係式より、$C_p-C_V=nR>0$ なので、$\gamma-1>0$ が常に成り立つことから、

$$W_{2\to3}=\frac{p_2V_2^{\gamma}}{\gamma-1}\left(V_2^{1-\gamma}-V_3^{1-\gamma}\right)=\frac{1}{\gamma-1}(p_2V_2-p_3V_3)=\frac{nR}{\gamma-1}(T_H-T_L)$$

問5.　Poissonの式より、

$$T_HV_2^{\gamma-1}=T_LV_3^{\gamma-1}$$
$$T_LV_4^{\gamma-1}=T_HV_1^{\gamma-1}$$
$$\to\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}$$

問２より、

$$\frac{Q_H}{T_H}=nR\log\frac{V_2}{V_1}$$

同様に、

$$\frac{Q_L}{T_L}=nR\log\frac{V_4}{V_3}=nR\log\frac{V_1}{V_2}=-\frac{Q_H}{T_H}$$

問6.　熱力学の第１法則より、

$$Q_H+Q_L=\int_{V_1}^{V_2}p\,dV+\int_{V_2}^{V_3}p\,dV+\int_{V_3}^{V_4}p\,dV+\int_{V_4}^{V_1}p\,dV$$

$V_2 = V_3$、$V_4 = V_1$ より、右辺の第 2 項と第 4 項は 0 とすることができる。よって、

$$
\begin{aligned}
Q_H + Q_L &= \int_{V_1}^{V_2} p(T_H, V)dV + \int_{V_3}^{V_4} p(T_L, V)dV \\
&= \int_{V_1}^{V_2} p(T_H, V)dV - \int_{V_4}^{V_3} p(T_L, V)dV \\
&= \int_{V_1}^{V_2} [p(T_H, V) - p(T_L, V)]dV \\
&= \int_{V_1}^{V_2} [p(T_H, V) - p(T_H - dT, V)]dV \simeq dT \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV
\end{aligned}
$$

問7.　Clausius の等式より、

$$
\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = \frac{1}{T_L}(Q_H + Q_L) - \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_H}\right) Q_H \simeq \frac{1}{T_L}(Q_H + Q_L) - \frac{dT}{T_L^2} Q_H = 0
$$

$$
\to Q_H + Q_L = \frac{dT}{T_L} Q_H
$$

また、熱力学第 1 法則より、

$$
Q_H = \int_{V_1}^{V_2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV
$$

よって、

$$
Q_H + Q_L = \frac{dT}{T_L} \int_{V_1}^{V_2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV
$$

これと問 6 の関係式を比較して、

$$
\int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = \frac{1}{T_L} \int_{V_1}^{V_2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV
$$

これが任意の区間 $[V_1, V_2]$ について成り立ってよいので、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]$$