令和８年度

理工学群　数学類
外国学校経験者特別入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

① 試験時間は１２０分です．全部で３問あり，すべてに解答してください．

② 問題ごとに解答用紙１枚ずつを使用し，各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください．

③ 解答が書ききれない場合は，「裏へ」と明記した上で，その解答用紙の裏面に続けて書いてください．ただし，上部は５，６cm程あけてください（採点時には隠れてしまいます）．

問題 I　c を実数とし，$c > 4$ とする．

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{2a_n - c}{2 - a_n}\quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) すべての自然数 n について $a_n < 2$ かつ $a_n \neq -\sqrt{c}$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{a_n + \sqrt{c}}\quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 II　複素数 z が

$$\left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},\ z \neq 0,\ \text{かつ}\ z \neq -1$$

を満たしながら動くとする．複素数平面上で 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) を考える．

(1) $\angle$ACB は直角であることを示せ．

(2) $|z|$ を z の偏角 θ を用いて表せ．

(3) z^2 の虚部が最小となる z を求めよ．また，そのときの三角形 ABC の面積を求めよ．

問題 III　四面体 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ が，$\mathrm{A_1B_1} = \sqrt{3}$，$\mathrm{B_1C_1} = 2$，$\mathrm{C_1A_1} = \sqrt{3}$，および，

$$\overrightarrow{\mathrm{D_1A_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{D_1B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{D_1B_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}} = \overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{D_1A_1}} = 0$$

を満たすとする．自然数 n に対して，四面体 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ が次の条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv) を満たすとする．

(i) 点 A_{n+1} は三角形 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の重心である．
(ii) 点 B_{n+1} は三角形 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n$ の重心である．
(iii) 点 C_{n+1} は三角形 $\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の重心である．
(iv) 点 D_{n+1} は三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の重心である．

以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n}$，$\overrightarrow{\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{D_1A_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{D_1B_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}}$ と n を用いて表せ．

(2) 四面体 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の体積を V_n とする．このとき V_n を n を用いて表せ．

(3) 三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の内心を I_n とし，四面体 $\mathrm{I}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の体積を W_n とする．このとき W_n を n を用いて表せ．