

令和8年度 外国学校経験者特別入試

小論文問題

(120分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、この表紙を含めて6ページあります。
3. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に、「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」を記入してください。
4. 問題は3問、解答用紙は3枚あります。各問題の解答は、それぞれ1枚の解答用紙に記入してください。裏面を使用しても構いません。
5. 解答用紙の上部の 内には、問題番号を明記してください。

問題 1

数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 12 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たし, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$ とする。

(1) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき, b_1 , b_2 を求めよ。

(2) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$ を求めよ。

問題 2

問1 xy 平面上の2つの曲線 $C_1: y = kx^2$ (k は実数)と $C_2: y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ について考える。

2つの曲線はある点 P で接し、他に交点をもたない。 \log を自然対数とし、 e を自然対数の底とする。以下の問いに答えよ。

(1) k の値と接点 P の座標を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と C_2 、および x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

問2 関数 $f(x) = e^{\cos x} - \cos x$ について次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 閉区間 $[0, \pi]$ における $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

問題 3

水平な床面上を摩擦なしに左右に動くことのできる質量 M の台車がある。その台車の上に、大きさが無視できる質量 m の小球があり、ばね定数 k の軽いばねの一端に取り付けられている。ばねの他端は台車の壁面に固定されている。小球は台車上で左右に動き、台車と小球の間の摩擦は無視できる。床面に沿った x 軸は、台車の重心の初期位置を原点とし、右向きを正方向とする。また、台車上に定める y 軸は、ばねの自然長の位置を原点として、 x 軸と同じ方向にとる。ばねと台車は十分長いものとする。

いま、図 1 のように、台車が動かないようにストッパーで固定し、小球を $y = y_1$ まで引っ張り静止させた状態から、静かに放したところ、小球は単振動を始めた。

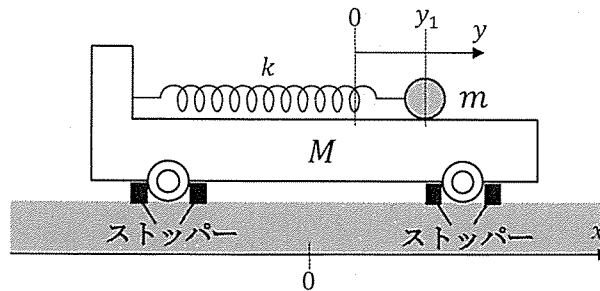


図 1

- (1) この小球の単振動の周期 T_1 を、 M, m, k, y_1 のうちから必要なものを用いて表せ。
- (2) 小球が自然長に初めて到達した際の小球の速度 v_1 を、 M, m, k, y_1 のうちから必要なものを用いて表せ。

つぎに、小球を $y = y_2$ の位置にストッパーを設けて静止させた(図 2)。時刻 $t = 0$ ですべてのストッパーを外すと、台車と小球は動きだし、小球は $y = A \cos \omega t$ の単振動を始めた。ここで A, ω は単振動の振幅、角振動数である。

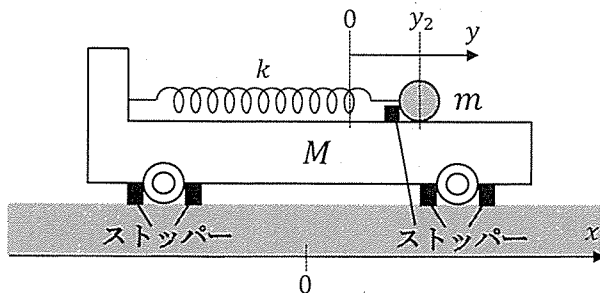


図 2

- (3) ストッパーを外した後の床面からみた台車の運動方程式、および台車の上からみた小球の運動方程式をそれぞれ示せ。ただし、床面からみた台車の加速度を a_1 、台車の上からみた小球の加速度を a_2 とする。
- (4) 小球の単振動の周期 T_2 を、 M, m, k, y_2 のうちから必要なものを用いて表せ。また、この周期は、(1)で求めた周期 T_1 と比べて長いか、同じか、短い、理由と共に示せ。
- (5) 台車の質量を $M = 3m$ とする。台車の重心位置の時間変化を描いたグラフとして、最も適切なものを図3の(ア)～(ケ)の中から1つ選び、記号で答えよ。また、その理由も簡潔に示せ。ただし、 T_2 は(4)で求めた周期である。

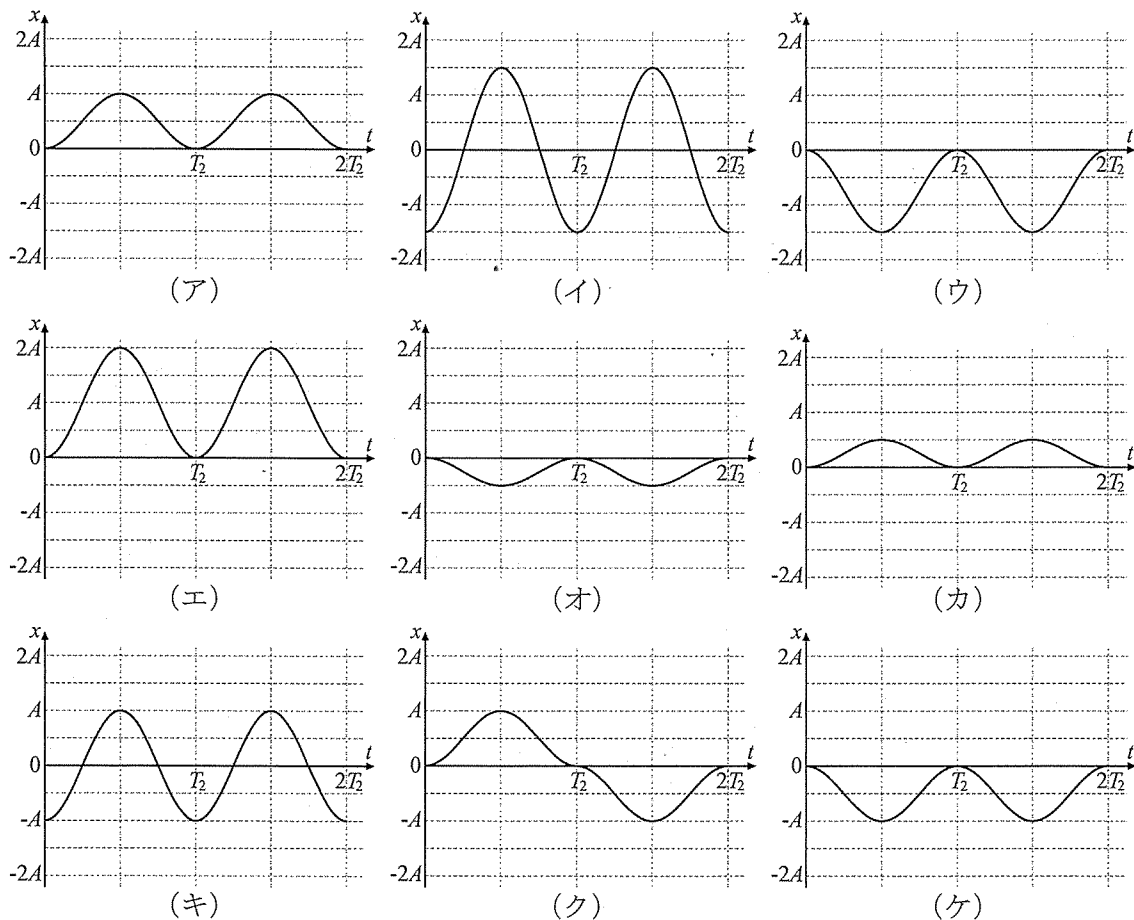


図3

つぎに、台車と小球の運動を止めた直後、台車に外力を加えて x 軸の正方向にある一定の加速度 α で運動させたところ、小球は台車上の $y = y_3$ の位置で静止していた (図 4)。時刻 $t = t_1$ で外力を取り除き、以後、台車には外力が働かないものとする。

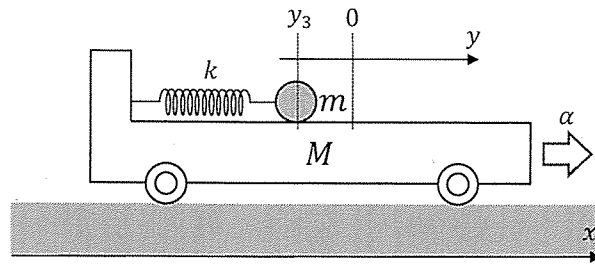


図 4

- (6) 小球の位置 y_3 を、 M, m, k, α, t_1 のうちから必要なものを用いて表せ。
- (7) 時刻 $t = t_1$ 以後の台車の重心位置の時間変化を描いたグラフとして、最も適切なものを図 5 の (ア) ~ (カ) の中から 1 つ選び、記号で答えよ。また、その理由も簡潔に示せ。

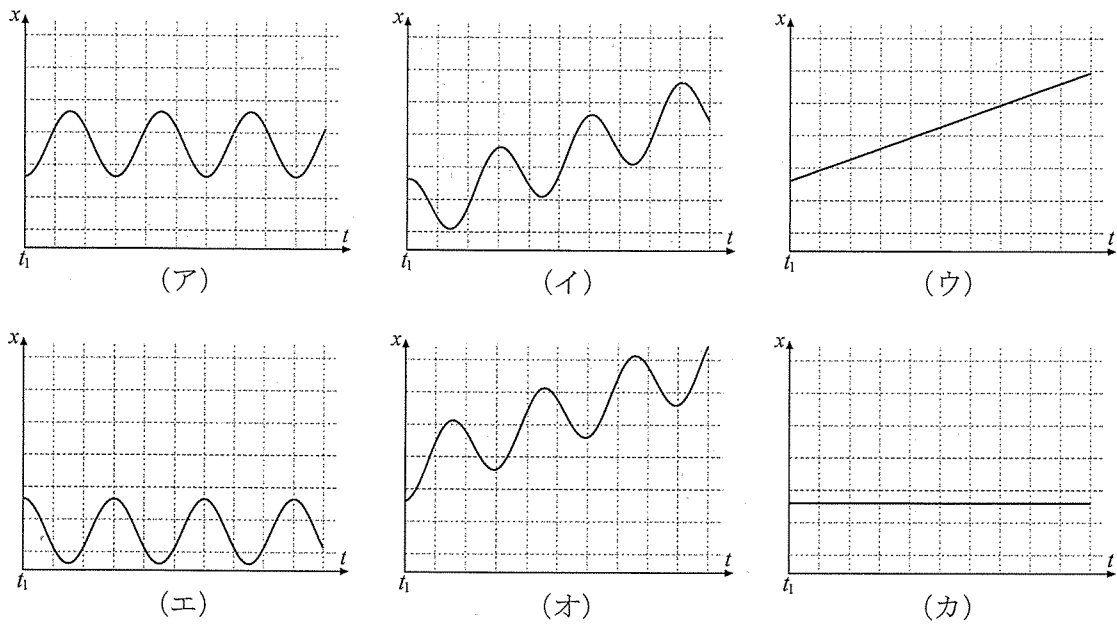


図 5