

令和 9 年度学群編入学試験

理工学群物理学類

学 力 検 査

(専門科目)

問 題 冊 子

注意事項

- ① 問題Ⅰ～Ⅲのすべてに解答すること。
- ② 解答用紙は各問題に対して1枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
- ③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
- ④ 下書き用紙は採点しない。
- ⑤ 試験時間は120分です。

問題 I

最初に、図 1 のような x 軸に平行な床の上を x 軸正の向きに動く 2 つの物体の衝突問題を考える。 z 軸は床に垂直な方向である。これらの物体は回転がなく、質量が m の質点とみなせるものとする。はじめ物体 2 は静止しており、物体 1 は速度 v_1 で物体 2 に衝突する。重力加速度は大きさが g で z 軸負の向きを向いている。運動している物体には、時間や速度によらない動摩擦係数 μ に比例した大きさ μmg の摩擦力が働くとする。

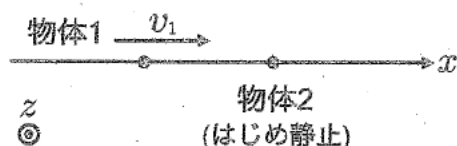


図 1

問 1. 時刻 t における物体 2 の速度を $v(t)$ として、衝突後から静止するまでの物体 2 の運動方程式を書け。

問 2. 衝突直後の物体 1 と物体 2 の速度をそれぞれ v'_1 と v'_2 と書くことにすると、はねかえり係数 e は $e = -(v'_1 - v'_2)/v_1$ と定義される。このはねかえり係数を用いて、衝突直後から静止するまでに物体 2 が動いた距離を求めよ。

次に、図 2 のような x - y 平面に平行な床の上を x 軸正の向きに動く剛体のボール 1 とボール 2 の衝突問題を考える。床の平面の座標軸である x 軸と y 軸は図の方向にとり、 z 軸は床に垂直な方向である。どちらのボールも、質量が m で半径が a の球であり重心は球の中心にあるとし、全ての方向の主慣性モーメントが等しく I であるとする。重力加速度は大きさが g で z 軸負の向きを向いている。はじめボール 2 は静止しており、ボール 1 は速度 v_1 でボール 2 に衝突する。また、ボールの回転の角速度は衝突前後で変わらないとする。

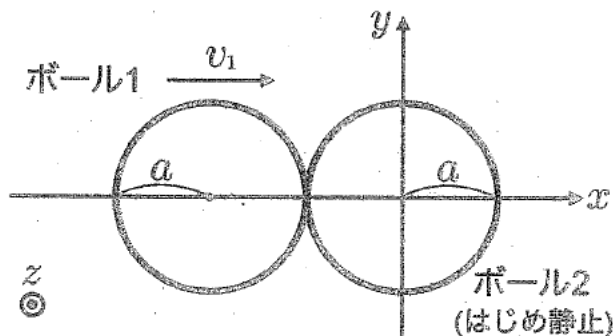


図 2

(次頁につづく)

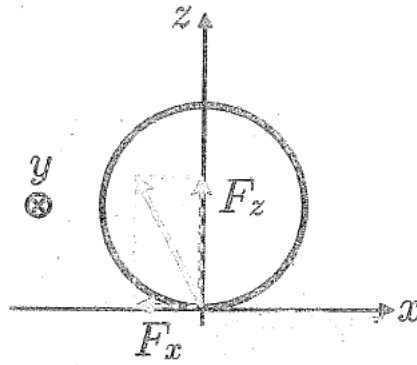


図 3

衝突直後のボール 2 は、転がりの条件 $v(t) - \omega(t)a = 0$ を満たしていないため、しばらく滑りながら回転する。この時、ボール 2 には重力以外にも床との接触点に図 3 のように力が働いている。力の成分の方向は図の向きを正とする。また、 y 軸の方向には力は働いていない。

問 3. 時刻 t におけるボール 2 の速度の x 成分を $v(t)$ 、角速度の y 成分を $\omega(t)$ とおくと、衝突後からボールが静止するまでの運動方程式は

$$m\dot{v}(t) = -F_x, \quad I\dot{\omega}(t) = aF_x$$

となる。これら 2 つの方程式が成り立つ理由を、図 3 に表されている力を用いて簡潔に説明せよ。

問 4. 滑りながら回転をしている時、問 3 で定義した F_x は摩擦力であり、

$$F_x = \mu_s F_z$$

の関係式を満たしているとする。ここで、滑りながらの回転であっても動摩擦係数 μ_s は時間や速度によらず一定であるとする。この摩擦力によって角速度が増加していくと転がりの条件 $v(t) - \omega(t)a = 0$ が満たされる瞬間が訪れ、その瞬間からボールの回転は滑りのない転がりに転じる。衝突のはねかえり係数が 1 であったとして、衝突直後から転がりに転じるまでの時間を求めよ。

問 5. 問 4 で求めた転がりに転じた時刻でのボール 2 の速度の x 成分を求めよ。

ボール 2 が滑りのない転がりに転じた後は、問 4 で考えた摩擦力は働かなくなる。この時、ボールの変形によって生じる力のモーメント (トルク) が無視できなくなり、問 3 で書き下した運動方程式は

$$m\dot{v}(t) = -F_x, \quad I\dot{\omega}(t) = aF_x - a\mu_r F_z$$

と変更を受けるとする。係数 μ_r は時間や速度によらない定数であるとする。

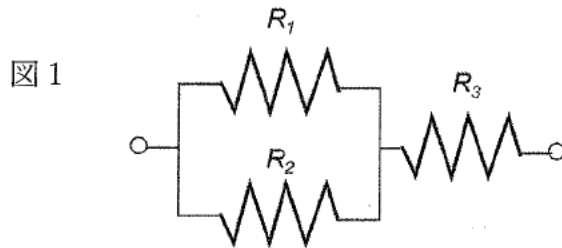
問 6. 転がりの条件を用いて、 $v(t)$ についての方程式を F_x と F_z 、 $\omega(t)$ を用いずに書け。

問 7. ボール 2 が転がりに転じた瞬間から静止するまでに動いた距離を求めよ。

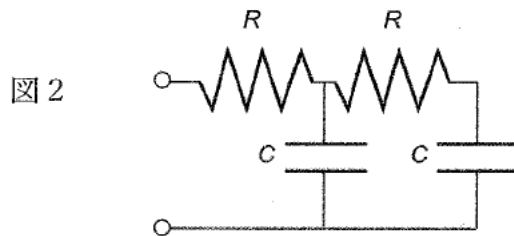
問題 II

下記の問いに答えよ。ただし、虚数単位を j とする。

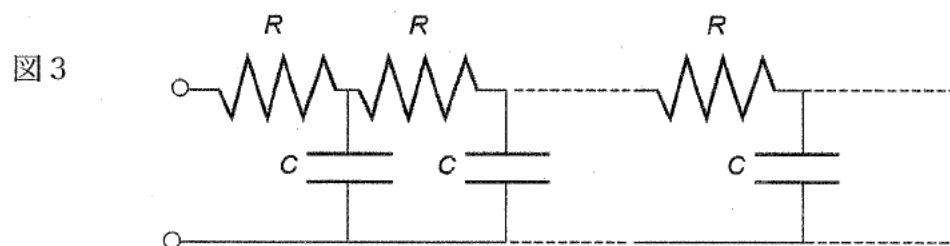
- 問 1. 抵抗値 R_1 、 R_2 、 R_3 の 3 つの抵抗を図 1 のようにつないだ回路を用意した。
この回路の合成抵抗を求めよ。



- 問 2. 抵抗値 R の抵抗と、静電容量 C のコンデンサーを図 2 のようにつないだ回路を用意した。この回路に角周波数 ω の交流電圧を加えた時の合成インピーダンスを求めよ。ただし、式を整理する必要はない。



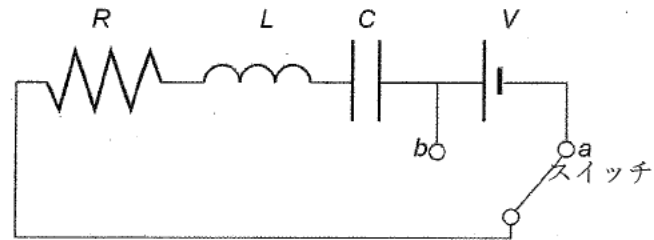
- 問 3. 抵抗値 R の抵抗、静電容量 C のコンデンサーを、図 3 のように、右側に同じ回路をくりかえし無限につらねた回路を考える。この回路に角周波数 ω の交流電圧を加えた時の合成インピーダンスを求めよ。



(次頁につづく)

電圧 V の直流電源、抵抗値 R の抵抗、インダクタンス L のコイル、静電容量 C のコンデンサーを、図4のようにつないだ回路を用意した。以下の問いに答えよ。電流 I は、右周りを正とする。

図4



- 問4. スイッチを a につないでから十分長い時間が経過したとする。コンデンサーに蓄えられた電荷量 Q と電流 I を求めよ。
- 問5. 十分長い時間が経過したのちの時刻 $t = 0$ において、スイッチが b に切りかわったとする。その後のコンデンサーに蓄えられている電荷を $Q(t)$ とする。 $t > 0$ において、 $Q(t)$ が従うべき t に関する2階線形微分方程式を示せ。
- 問6. 抵抗値を $R = 2\sqrt{L/C}$ とする。問5の線形微分方程式を解き、電流 I を時刻 t の関数として表せ。また、その関数のグラフの概形を示せ。
- 問7. 抵抗値を $R < 2\sqrt{L/C}$ とする。問5の線形微分方程式を解き、電流 I を時刻 t の関数として表せ。また、その関数のグラフの概形を示せ。

問題 III

体積 V 、圧力 P 、絶対温度 T の状態にある1モルの気体について以下の問いに答えよ。
内部エネルギー U は、温度 T と体積 V の2変数関数 $U(T, V)$ とみなしてよい。 R は気体定数である。

問1. U の変化 dU を、 T の変化 dT と V の変化 dV を用いて表せ。

問2. エントロピー S の変化 dS は式(1)で与えられる。

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} \quad (1)$$

式(1)と問1の dU より式(2)を導け。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \quad (2)$$

問3. 状態方程式 $PV = RT$ を満たす気体の U は V に依存しないこと示せ。

問4. 状態方程式 $PV = RT$ を満たす気体の U は、温度の一次関数であることを示せ。

ただし、定積比熱 C_V が温度によらないとする。

ある気体の状態方程式は $P = \frac{1}{3}u$ で与えられ、 U は $U = Vu$ と表すことができるとする。

ただし、 u は T のみの関数 $u(T)$ である。

問5. 式(1)を用いて、 U の変化 dU を、 S の変化 dS と V の変化 dV を用いて表せ。

問6. dS を T 、 V 、 u 、 $\frac{du}{dT}$ 、 dV 、 dT を用いて表せ。

問7. $\frac{du}{dT}$ を u と T で表せ。

問8. u の関数形を表せ。