

令和 9 年度編入学試験

学力検査問題

(150 分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、この表紙を含めて 6 ページあり、専門科目（数学、物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は、数学が 2 問、物理学が 2 問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に、「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては、数学、物理学の各問題で、別々の解答用紙を用いてください。解答用紙は、裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の 内に、数学問題 1，数学問題 2，物理学問題 1，物理学問題 2 と記入し、各問題に小問がある場合には、それらの小問の解答を全て要領良く記述してください。

物理学1 問題訂正

(3) の訂正

(2) で得られた角運動量 dL_z を円盤の全体積 V で積分して, $\rightarrow$ (削除)

円盤の z 軸まわりの角運動量 L_z を (2) と同様に ω , $\mathbf{r}$ の成分, ρ , および, dV を用いて式で表せ。

$\rightarrow$ 円盤の z 軸まわりの L_z を ω , a , ρ , および, 円盤の全体積 V を用いて式で表せ。

(4) の訂正

z 軸まわりのモーメント $\rightarrow z$ 軸まわりの外から与えられるモーメント

数学 1 試験問題

1. 実数上の積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ が偶関数であることを示せ。

(2) $x = \tan \theta$ と置換して、積分値 I を求めよ。

2. 変数 x を実数とし、関数

$$y = f(x) = x^3 + x$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 f が単調増加であることを示した上で、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在することを示せ。

(2) 逆関数 $f^{-1}(y)$ の導関数 $(f^{-1})'(y)$ を、逆関数 $f^{-1}(y)$ を用いて表せ。

(3) 実数値 $f^{-1}(2)$ と $(f^{-1})'(2)$ を求めよ。

3. 実数収束列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は $0 < a_1 < b_1$ および

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たし、その極限值をそれぞれ $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とする。

このとき $\alpha = \beta$ であることを示せ。

数学 2 試験問題

次の二次対称行列 A に関する以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。ただし、 $\lambda_1 < \lambda_2$ とする。
- (2) λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ をそれぞれ1つずつ求めよ。ただし、それぞれ第一成分を正とし、また正規化して答えよ。
- (3) 基底 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ に対するベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の表現を $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とする。
すなわち、

$$\mathbf{x} = x' \mathbf{b}_1 + y' \mathbf{b}_2$$

である。 $\mathbf{x} = B\mathbf{x}'$ と表すとき、行列 B を求めよ。

- (4) 基底 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ に対する A の表現 A' 、すなわち、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{x} = B\mathbf{x}'$ 、 $\mathbf{y} = B\mathbf{y}'$ とおいたときに $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$ となる A' を答えよ。
- (5) 二次元実数縦ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ に次の形で内積を定義する。
 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

ただし、 $\mathbf{x}^T$ は縦ベクトル $\mathbf{x}$ が転置された横ベクトルを表す。
任意の $\mathbf{x}$ に対して $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_A \geq 0$ となることを計算により示せ。

- (6) (5) で定義した内積空間に対する正規直交基底を一組定めよ。

物理学 1 試験問題

時刻 t において，図 1 のように，半径 a で一定の厚さの円盤が，円盤の中心 C を通り円盤の垂直方向に固定された z 軸まわりに角速度 ω で回転運動している。この回転運動の自由度は固定軸である z 軸まわりの 1 自由度のみとする。原点 O は z 軸上の適当な位置にあると考えてよい。重力の影響は考えない。このとき，以下の問いに答えよ。

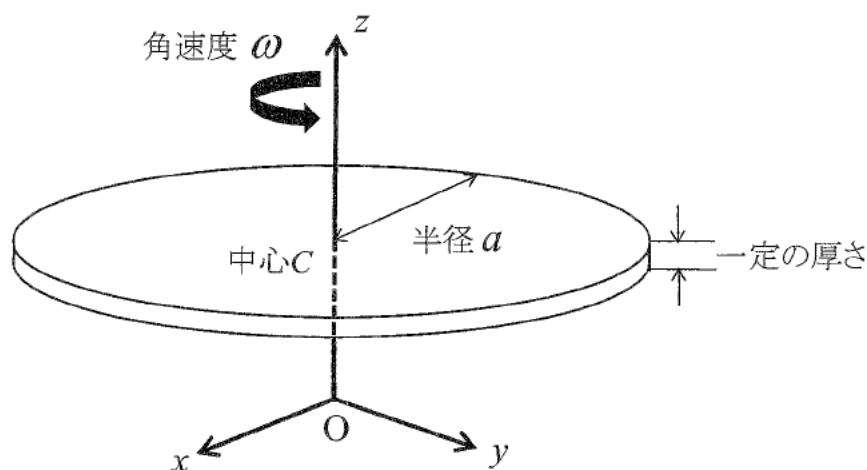


図 1

- (1) 円盤を細かく微小要素で分割し，その微小要素を質点とみなせるとする。円盤内の 1 つの微小要素の微小質量を dm ，位置ベクトルを $\mathbf{r}$ ，速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とした場合に， dm ， $\mathbf{r}$ ，および， $\mathbf{v}$ を用いて，円盤の微小要素の原点 O まわりの角運動量 $d\mathbf{L}$ を式で表せ。
- (2) 円盤の微小要素の z 軸まわりの角運動量 dL_z を，角速度 ω ，位置ベクトル $\mathbf{r}$ の成分 (r_x, r_y, r_z) ，円盤の一定の密度 ρ ，および，円盤の微小要素の微小体積 dV を用いて式で表せ。
- (3) (2) で得られた角運動量 dL_z を円盤の全体積 V で積分して，円盤の z 軸まわりの角運動量 L_z を (2) と同様に ω ， $\mathbf{r}$ の成分， ρ ，および， dV を用いて式で表せ。また，円盤の z 軸まわりの角運動量 L_z と角速度 ω ，ならびに，円盤の z 軸まわりの慣性モーメント I_z との関係を示す式で表せ。

(次ページに続く)

- (4) 円盤の z 軸まわりの角運動量 L_z と、 z 軸まわりのモーメント N_z との関係を式で表せ。
- (5) 慣性モーメント I_z 、角速度 ω 、および、 z 軸まわりのモーメント N_z を用いて、円盤の z 軸まわりの回転に対する運動方程式を示せ。

いま、円盤の端のある 1 点に、図 2 のように、速さに比例する抵抗力が円盤の接線方向に働き始めた。このような条件下で、以下の問いに答えよ。

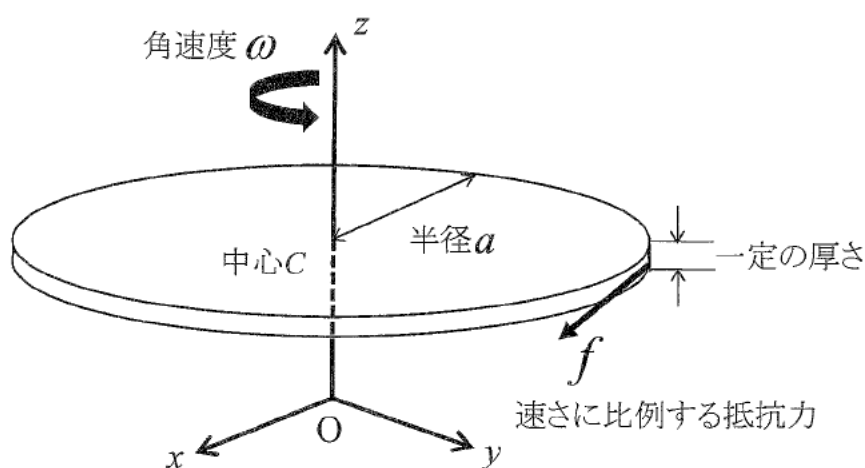


図 2

- (6) 速さに比例する抵抗力 f の比例係数を k ($k > 0$) とおいたとき、抵抗力 f の大きさを求めよ。
- (7) 円盤の z 軸まわりの回転に対する運動方程式を、時刻 t における角速度 ω に対して求めよ。
- (8) 抵抗力が働き始めた時刻 t を $t=0$ とし、そのときの角速度 ω を $\omega = \omega_0$ として、(7) で求めた運動方程式を解き、 $t \geq 0$ における角速度 ω を求めよ。

物理学 2 試験問題

図 1 のように、3次元空間中に、無限に広い接地された導体平面 ($z = 0$) 上の原点 O から距離 d ($d > 0$) の位置 $D(0, 0, d)$ に、電荷 $-q$ ($q > 0$) の点電荷が置かれている。無限遠の電位を 0 とし、誘電率を ϵ_0 としたとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 導体平面全体に誘起された全電荷を求めよ。
- (2) 点電荷が導体平面から受ける静電気力の大きさ F を求めよ。
- (3) $z > 0$ を満たす任意の点 $P(x, y, z)$ における静電ポテンシャルと z 方向の電場の大きさを求めよ。
- (4) 導体上の任意の点 $Q(x, y, 0)$ における表面電荷密度を求めよ。

図 2 のように、導体平面上の原点 O を中心とする円形領域 S を考える。このとき、円形領域 S 全体に誘起された全電荷は、導体平面全体に誘起された全電荷のちょうど半分であった。

- (5) 円形領域 S の半径を求めよ。
- (6) 点電荷が円形領域 S のみから受ける静電気力の大きさを求め、(2) で求めた F に対する比率を答えよ。

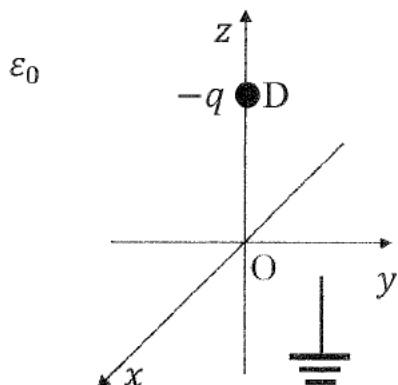


図 1

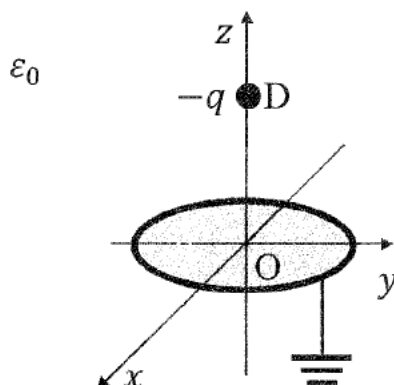


図 2