

令和9年度

試験名:学群編入学試験

【理工学群

数学類】

区 分	標準的な解答例及び出題意図
問題Ⅰ	ベクトル空間, 線形写像についての基礎的な理解を問う.
問題Ⅱ	二変数関数の微分積分に関する基礎的な理解を問う.
問題Ⅲ	集合と, その上の写像に関する基礎的な理解を問う.

問題 I (解答例：以下に挙げるのは略解である。また、解答には複数の方法があり、ここに挙げた解法が優れているとは限らない。)

(1) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$ を利用すればわかる。

(2) $A_\alpha x = 0$ を解くと、例えば

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が $\text{Ker } f_\alpha$ の基底とわかる。

(3) B_α の階数は 2 とわかるので、準同型定理により g_α は単射である。したがって、 $f_\alpha \circ g_\alpha$ が単射であることは、 $\text{Im } g_\alpha \cap \text{Ker } f_\alpha = \{0\}$ と同値である。(1) および (2) の結果より、これは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次独立であることと同値であり、その必要十分条件は $\alpha \neq 1$ 。

問題 II (解答例：以下に挙げるのは略解である。また、解答には複数の方法があり、ここに挙げた解法が優れているとは限らない。)

(1) $f(x, y)$ の偏導関数は、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

だから、両方が 0 になるのは $(x, y) = (\pm 1, 0)$ である。Hessian の行列式をこれらの点で求めると、

$$\det \text{Hess } f(1, 0) > 0,$$

$$\det \text{Hess } f(-1, 0) > 0$$

となるので、これらはいずれも極値である。

(2) C 上では $(x-1)^2 + y^2 = 1$ だから、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x}{1 + (x-1)^2 + y^2 + 2x - 1} \\ &= \frac{x}{1 + 2x} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+2} \end{aligned}$$

である。 C 上で x は $[0, 2]$ の全ての値をとるので、最大値は $\frac{2}{5}$ 、最小値は 0 。

(3) $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ と変数変換すると、 (r, θ) の取りうる値の範囲は $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ であり、求める積分は

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{r^2 \cos \theta}{1 + r^2} d\theta dr$$

と一致する。これを計算すると、積分値は $2 - \frac{\pi}{2}$ となる。

問題 III (解答例：以下に挙げるのは略解である。また、解答には複数の方法があり、ここに挙げた解法が優れているとは限らない。)

- (1) $z \in Z$ を任意にとる。 $g \circ f$ が全射なので、 $x \in X$ が存在して、 $g(f(x)) = z$ である。とくに $y = f(x)$ とすれば、これは g が全射であることを意味する。
- (2) f が単射でないとすると、ある $x_1, x_2 \in X$ が存在して、 $x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ である。このとき、 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ だから $g \circ f$ も単射でない。
- (3) (1) と (2) の結果から、(c) から (a) および (b) はしたがう。次に (a) を仮定する。 $y \in X$ を任意にとる。全射性から $x \in X$ が存在して、 $h(x) = y$ が成り立つ。両辺の $h \circ h$ による像を考えると、 $h \circ h \circ h(x) = h \circ h(y)$ であるが、この左辺は問題の仮定から $h(x) = y$ に一致する。したがって、 $h \circ h$ は恒等写像である。最後に、 h が単射と仮定すると、任意の $x \in X$ に対して、 $h(h \circ h(x)) = h(x)$ であることから $h \circ h(x) = x$ がしたがうので、 $h \circ h$ は恒等写像である。