

令和 9 年度学群編入学試験

理工学群数学類

学 力 検 査

(専門科目)

問 題 冊 子

注意事項

- ① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
- ② 解答用紙は各問題に対して1枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
- ③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
- ④ 下書き用紙は採点しない。
- ⑤ 試験時間は120分です。

問題 I 以下の問いに答えよ.

- (1) W_1, W_2 を $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間とし, $\{a_1, a_2\}$ を W_1 の基底, $\{a_3, a_4\}$ を W_2 の基底とする. 以下の (a), (b) は同値であることを示せ.
- (a) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である.
- (b) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ は線形独立である.

- (2) α を実数とし,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\alpha - 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 - 2\alpha & -1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

とする. $f_\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $f_\alpha(x) = A_\alpha x$ で定める. f_α の核 $\text{Ker } f_\alpha$ の基底を一組求めよ.

- (3) α を実数とし,

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. $g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $g_\alpha(x) = B_\alpha x$ で定める. (2) で定めた f_α と g_α に対し, 合成写像 $f_\alpha \circ g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が単射となるための α の必要十分条件を求めよ.

問題 II $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x, y)$ の極値を全て求めよ。

(2) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ とするとき、 $f(x, y)$ を C 上に制限した関数の最大値、最小値を求めよ。

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき、

$$\int_D f(x, y) \, dx dy$$

を求めよ。

問題 III X, Y, Z を集合、 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: X \rightarrow X$ を写像とする。以下の問いに答えよ。

(1) $g \circ f$ が全射であるとき、 g が全射であることを示せ。

(2) $g \circ f$ が単射であるとき、 f が単射であることを示せ。

(3) $h \circ h \circ h = h$ が成り立つとき、以下の (a), (b), (c) は同値であることを示せ。

(a) h は全射である。

(b) h は単射である。

(c) $h \circ h$ は恒等写像である。